

# Por qué si la suma de los dígitos de un número suman un múltiplo de 3 entonces el número es divisible entre tres

Miguel Gabriel Reséndiz Sánchez <cleek@nocturno.com.mx>

15 de enero de 2009

Supongamos que queremos saber si 1594875 es un número que se puede dividir entre 3, entonces, en vez de hacer la división, simplemente sumamos todos los dígitos  $1 + 5 + 9 + 4 + 8 + 7 + 5 = 39$ . Entonces saber si 1594875 es divisible entre 3, se reduce a saber si 39 es divisible entre 3, otra vez sumamos los dígitos  $3 + 9 = 12$  y 12 es claramente divisible entre 3 ( es  $3 \times 4$  ) así que 39 es divisible entre 3, entonces como 39 es divisible entre 3, también lo es 1594875. Y de hecho esa es la técnica en general. Sumar los dígitos una y otra vez hasta obtener un múltiplo de 3, si es que el número se puede dividir entre 3 o si al final la suma de los dígitos no da un múltiplo de 3, entonces simplemente no es divisible entre 3.

Otro ejemplo 16482437.  $1 + 6 + 4 + 8 + 2 + 4 + 3 + 7 = 35$ ,  $3 + 5 = 8$  y 8 no es múltiplo de 3, entonces 16482437 tampoco es múltiplo de 3. Simple ¿verdad?.

La parte entretenida es explicar el por que pasa eso. Así que vamos a demostrar que: Un número es divisible entre 3 si y solo si la suma de los dígitos de ese número es un múltiplo de 3. Exactamente vamos a ver que la implicación va para los dos lados.

Primero hay que creernos algunas cosas. Primero, que todo número natural se puede expresar como la suma de sus dígitos multiplicados por alguna potencia de diez (osease que se puede expresar en base 10 [que se prueba con el teorema del cambio de base]). Es decir,  $5 = 5 \times 10^0$ ,  $35 = 3 \times 10^1 + 5 \times 10^0$ ,  $16486 = 1 \times 10^4 + 6 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 6 \times 10^0$ . Así que cualquier número natural  $m$  lo podemos escribir como  $m = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + a_{n-2} \times 10^{n-2} + \dots + a_2 \times 10^2 + a_1 \times 10^1 + a_0 \times 10^0$ .

Esa estuvo fácil, otra cosa que necesitamos saber, tiene que ver con los módulos. Esto es; supongamos que  $x \pmod{3} \equiv 1$ , entonces  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $x^k \pmod{3} \equiv 1$ . En cristiano, esto es que si al dividir  $x$  entre 3, el residuo da uno, entonces al elevar  $x$  a cualquier potencia, el residuo de dividir ese número entre 3, sigue siendo 1.

Como vamos a trabajar con naturales y muchos, necesariamente tendremos que usar una entretenida inducción.

Veamos que vale para  $k = 0$ :

Tenemos que  $x \pmod{3} \equiv 1$ , esto es que  $\exists m \in \mathbb{Z} | x = 3 \times m + 1$  entonces  $x^0 = 1$ , que es lo mismo que decir que  $x^0 = 1 = 3 \times 0 + 1$ , lo que cumple la proposición trivialmente. Osease que  $\exists m \in \mathbb{Z} | x^0 = 3 \times m + 1$  lo que es lo mismo que decir que  $x \pmod{3} \equiv 1$ .

Ahora supongamos que vale para alguna cierta  $k$  (osease que  $x^k \pmod{3} \equiv 1$ ) y veamos que funciona

para  $k + 1$ :

Entonces tenemos que  $x \pmod{3} \equiv 1$  y veamos que pasa con  $x^{k+1}$ . Tenemos que  $x^{k+1} = x \times x^k$  pero recordamos que  $x^k \pmod{3} \equiv 1$  y que  $x \pmod{3} \equiv 1$  (por hipótesis), lo que nos dice que  $\exists m \in \mathbb{Z} | x^k = 3 \times m + 1$  y  $\exists p \in \mathbb{Z} | x = 3 \times p + 1$ . Entonces  $x^{k+1} = x \times x^k = (3 \times p + 1) \times (3 \times m + 1) = 3 \times 3 \times p \times m + 3 \times p + 3 \times m + 1 = 3 \times (3 \times p \times m + p + m) + 1$ , entonces como  $3 \times p \times m + p + m \in \mathbb{Z}$ , podemos afirmar que  $\exists q \in \mathbb{Z} | x^{k+1} = 3 \times q + 1$ , que es lo mismo que decir que  $x^{k+1} \pmod{3} \equiv 1$ . ■

Antes de seguir con la parte entretenida, notemos como es que todo se va a juntar. Primero, fijate en que 10 lo podemos ver como  $3 \times 3 + 1$ , que es lo mismo que decir que  $10 \pmod{3} \equiv 1$ , luego notamos que  $100 = 10^2$ , entonces  $100 \pmod{3} \equiv 1$ , y así podemos seguir viendo que  $1000 = 10^3$  y así con todas las potencias de 10.

Ahora si, a lo que nos truje. Un número  $x$  es múltiplo de tres si y sólo si la suma de sus dígitos es múltiplo de 3:

Empezamos con un número que es múltiplo de tres, esto es que  $\exists m \in \mathbb{Z} | x = 3 \times m$  y por otro lado, sabemos que  $x$  lo podemos escribir como la suma de sus dígitos multiplicados por una potencia de 10, osea que existen  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}$  tales que  $x = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \dots + a_2 \times 10^2 + a_1 \times 10^1 + a_0 \times 10^0$  y ya habíamos notado que  $\forall k \in \mathbb{N}, 10^k \pmod{3} \equiv 1$ , lo que nos dice que  $\forall k \in \mathbb{N}, \exists b_k \in \mathbb{N} | 10^k = 3 \times b_k + 1$ , lo mezclamos obteniendo que  $3 \times m = x = a_n \times (3 \times b_n + 1) + a_{n-1} \times (3 \times b_{n-1} + 1) + \dots + a_2 \times (3 \times b_2 + 1) + a_1 \times (3 \times b_1 + 1) + a_1 \times 10^0$ . Y usando la propiedad distributiva, obtenemos que

$$\begin{aligned} 3 \times m = x = & a_n \times (3 \times b_n + 1) + a_{n-1} \times (3 \times b_{n-1} + 1) + \dots + a_2 \times (3 \times b_2 + 1) + a_1 \times (3 \times b_1 + 1) + a_1 \times 10^0 = \\ & a_n \times 3 \times b_n + a_n + a_{n-1} \times 3 \times b_{n-1} + a_{n-1} + \dots + a_2 \times 3 \times b_2 + a_2 + a_1 \times 3 \times b_1 + a_1 + a_0 = a_n \times 3 \times \\ & b_n + a_{n-1} \times 3 \times b_{n-1} + \dots + a_2 \times 3 \times b_2 + a_1 \times 3 \times b_1 + a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1 + a_0 \end{aligned}$$

Entonces pasamos todo lo que tenga un 3 del lado izquierdo obteniendo que:  $3 \times m - 3 \times a_n \times b_n - 3 \times a_{n-1} \times b_{n-1} - \dots - 3 \times a_2 \times b_2 - 3 \times a_1 \times b_1 = a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1 + a_0$ . Notamos que todo lo del lado izquierdo tiene un 3 como factor y lo sacamos.  $3 \times (m - a_n \times b_n - a_{n-1} \times b_{n-1} - \dots - a_2 \times b_2 - a_1 \times b_1) = a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1 + a_0$

Primero que nada, notamos que del lado izquierdo tenemos 3 por algún otro número y del lado derecho tenemos exactamente la suma de los dígitos del número original. Osease que la suma de los dígitos es un múltiplo de 3.

Ahora vamos con el otro lado, tenemos un número  $x = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \dots + a_2 \times 10^2 + a_1 \times 10^1 + a_0$  del cual sabemos que  $a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1 + a_0 = 3 \times m$ . Y hacemos lo mismo de arriba, separar los  $10^k$  como  $3 \times s_k + 1$ , así que vamos.

$$\begin{aligned} x = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \dots + a_2 \times 10^2 + a_1 \times 10^1 + a_0 = & a_n \times (3 \times s_n + 1) + a_{n-1} \times (3 \times s_{n-1} + 1) + \\ & \dots + a_2 \times (3 \times s_2 + 1) + a_1 \times (3 \times s_1 + 1) + a_0 = a_n \times 3 \times s_n + a_n + a_{n-1} \times 3 \times s_{n-1} + a_{n-1} + \dots + \\ & a_2 \times 3 \times s_2 + a_2 + a_1 \times 3 \times s_1 + a_1 + a_0 = 3 \times (a_n \times s_n + a_{n-1} \times s_{n-1} + \dots + a_2 \times s_2 + a_1 \times s_1) + a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1 + a_0. \end{aligned}$$

Pero recordamos entonces que  $a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1 + a_0 = 3 \times m$ , con lo que tenemos que  $x = 3 \times (a_n \times s_n + a_{n-1} \times s_{n-1} + \dots + a_2 \times s_2 + a_1 \times s_1) + a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1 + a_0 = 3 \times (a_n \times s_n + a_{n-1} \times s_{n-1} + \dots + a_2 \times s_2 + a_1 \times s_1) + 3 \times m = 3 \times (a_n \times s_n + a_{n-1} \times s_{n-1} + \dots + a_2 \times s_2 + a_1 \times s_1 + m)$ . Es decir, que  $x$  es un número multiplicado por 3, osea que  $x$  es múltiplo de 3. ■

Espero se hayan entretenido, felices demostraciones.